CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE DES INGENIEURS DE LA VILLE DE PARIS
ouvert le 22 avril 1992

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES
Durée : 2 heures - coefficient : 2

Le sujet comporte 2 pages.

N.B : Il est demandé d'exposer les questions dans l'ordre de l'énoncé.
Les résultats devront être soulignés ou encadrés.

Notations

a) a,v et α désignent trois réels strictement positifs.
b) la tangente hyperbolique de x sera notée tanh(x).
c) On note A l'ensemble des fonctions f continues sur IR, de classe C^1 par morceaux sur IR et telles que pour tout x de IR on ait :

$0 \leq f(x) \leq a$, $|f'_g(x)| \leq v$, $|f'_d(x)| \leq v$, et $f(0) = 0$.

Partie I

Pour f donnée dans A, on note F une fonction de classe C^1 sur IR vérifiant l'équation différentielle (E) : $F' + \alpha F = f$, et la condition initiale $F(0) = 0$.

1°) Pour f donnée dans A, justifier l'existence et l'unicité de la fonction F vérifiant les conditions données ci-dessus.
Dans la suite de la partie I, à toute fonction f donnée dans A on fait correspondre la fonction F ainsi définie.

2°) Pour f donnée dans A, calculer la fonction F, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale.

3°) Pour f donnée dans A, montrer que pour tout x de IR_+ on a :

$$|F'(x)| \leq v \frac{1-\exp(-\alpha x)}{\alpha}$$

On justifiera les calculs effectués.

4°) On considère la fonction f_0 de A définie par :
si $x \leq 0$, $f_0(x) = 0$
si $0 \leq x \leq a/v$, $f_0(x) = vx$
si $x \geq a/v$, $f_0(x) = a$.

a) Tracer f_0.
b) Déterminer la dérivée de la fonction F_0 correspondante.
c) Donner l'allure de la courbe représentative de F_0'.
d) Que constate-t-on sur la majoration de 3°)?

5°) On considère la fonction f_1 de A définie par :
si $x \leq a/v$, $f_1(x) = f_0(x)$
si $a/v \leq x \leq 2a/v$, $f_1(x) = 2a - vx$,
f_1 etant périodique de période $2a/v$ sur $\mathbb{R}_+$.
On pourra poser : $a/v = T$, et $k = \alpha T$.

a) Tracer f_1.

On considère la fonction F_1 correspondante, et pour n dans IN, on note:
$u_n = F_1'(na/v)$.

b) Calculer $F_1(2na/v)$. En déduire u_{2n} et u_{2n+1}.

c) Montrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes; on note λ et μ les limites respectives de ces deux suites. Calculer λ et μ en fonction de v, α et $\tanh(\alpha T/2)$, puis en déduire une relation simple entre λ et μ.

d) En déduire que pour tout n de IN on a : $|u_n| \leq u_1$.

e) Etudier F_1' sur $[2nT,(2n+1)T]$ et sur $[(2n+1)T,(2n+2)T]$. Donner l'allure de la courbe représentative de F_1'.

Partie II

Dans cette partie, a et v vérifient : $a = \pi v$, c'est-à-dire $T = \pi$.

On considère la fonction f_2, 2π-périodique sur IR, définie par :
si $0 \leq x \leq \pi$, $f_2(x) = vx$
si $\pi \leq x \leq 2\pi$, $f_2(x) = 2a - vx$.

On recherche une fonction G_2, 2π-périodique sur IR, de classe C^1 sur IR et vérifiant l'équation différentielle : $G_2' + \alpha G_2 = f_2$.

1°) Montrer que f_2 est développable en série de Fourier et déterminer son développement.

2°) Montrer que si G_2 existe, G_2 est développable en série de Fourier ainsi que G_2' ; calculer alors le développement en série de Fourier de G_2. En déduire l'existence et l'unicité de G_2.

3°) Calculer directement une expression de G_2 sur $[0,2\pi]$ à l'aide des fonctions usuelles élémentaires. En déduire une expression de G_2'.

4°) Montrer que sur IR, la fonction G_2' admet un minimum et un maximum que l'on calculera. Comparer le résultat trouvé à celui de I 5°c pour λ et μ.

5°) Tracer la courbe représentative de G_2'.

6°) A l'aide des questions précédentes, déterminer un développement en série de $\tanh(\alpha\pi/2)$.

FIN DU PROBLEME